Stackel系の全ての保存量を保つ離散化 (可積分系研究の新展開 : 連続・離散・超離散)

峯崎, 征隆

数理解析研究所講究録 1302 巻 2003 年 193-212

Stäckel 系の全ての保存量を保つ離散化

峯崎 征隆

Abstract

可積分系の重要なクラスである Stäckel 系の離散法を提案する。この離散法は正準変換と不等間隔の刻み幅をもつエネルギーを保存する離散法の組合せで得られるものである。この方法で得られる離散方程式系は元の力学系の全ての保存量を保つ。Stäckel 系の具体例として 3 次元 Kepler 問題、 Holt 系、可積分 Henon-Heiles 系をあげ、その離散化を行なう。

キーワード: Stäckel 系, 正則化, エネルギーを保存する離散法, 保存量

1 Introduction

力学系の軌道の良い近似を与える多くの数値計算法が研究されている。そのうち、力学系の長時間挙動を見るのに適している方法として symplectic 数値計算法、離散変分法、エネルギー保存離散法が知られている。

symplectic 数値計算法 (cf. [3],[12]) は Hamilton 系に対する数値計算法であり、相空間上の symplectic 形式を保存する。その結果、得られる離散力学系は正準変換となるが、Hamiltonian や 他の保存量は一般に保存されない。

離散変分法は多くの研究者によって研究されていて、energy-momentum integrator,symplectic-momentum integrator の 2 つのタイプに分かれる。しかし、非可積分系に対して symplectic 形式とエネルギーの双方を保存する数値計算法を構成することはできない。さらに、元の力学系がもつ全ての保存量を保つような離散方程式を離散変分法から構成することは不可能である。

エネルギーを保存する離散法 [2] は Hamiltoian の値を一定に保つ。しかし、一般に力学系の全ての保存量を保つわけではない。 いずれの方法でも、力学系の全ての保存量を保てない。そのため、得られた離散力学系は元の力学系とは異なる軌道を描くことになる。

本発表の目的は次の 2 つである。

(I) Stäckel 系と呼ばれる広い可積分 Hamilton 系のクラスに適応できる数値計算法を作る。

(II) (I) の数値計算法は全ての保存量を保ち、この数値計算法では変数分離が本質的な役割

2 Stäckel 系 と 関連する可積分系

2.1 Stäckel 系

力学系を求積する基本的な方法の 1 つとして変数分離法がある。変数分離法によって、多次元自由度の力学系を 1 次元の力学系の組に変換することができる。Stäckel 系は変数分離可能な可積分 Hamilton 系のクラスをなす。

定理 1 (Stäckel)
Hamiltonian の形が

$$H(p_1,\cdots,p_N,q_1,\cdots,q_N)=\sum_{j=1}^{N}g_j(q_1,\cdots,q_N)\left(p_j^2+U_j(q_j)\right) \tag{1}$$

である Hamilton 系を考える。ただし $U_j(q_j), j=1,\cdots,N,$ はポテンシャルである。この Hamilton 関数 (1) をもつ Hamilton-Jacobi 方程式が変数分離可能である必要十分条件は次の形の $N\times N$ 行列が存在することである。

$$\det\mathbf{S}\neq 0,\quad \sum_{k=1}^{N}s_{j,k}(q_k)g_k(q_1,\cdots,q_N)=\delta_{j,1}, \tag{2}$$

ただし、$s_{j,k}$ は q_k のみの関数である。■
この行列 $\mathbf{S}$ を Stäckel 行列と呼び、この行列に対応する係数 $g_j(q_1,\cdots,q_N)$ をもつ力学系 (1) を Stäckel 系と呼ぶ。(2) から $\mathbf{S}$ の逆行列 $\mathbf{S}^{-1}=[c_{j,k}]$ の 1 列目は

$$g_k(q_1,\cdots,q_N)=c_{k,1},\quad k=1,\cdots,N, \tag{3}$$

で表される。特に、$g_i=1, i=1,\cdots,N$ の場合は Liouville 系となる。
$I_k=I_k(p_1,\cdots,p_N,q_1,\cdots,q_N), k=1,\cdots,N$ を以下のように定義する。

$$(\mathbf{S}^{-1})^T\begin{pmatrix}p_1^2+U_1(q_1)\\ \vdots\\ p_N^2+U_N(q_N)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_1\\ \vdots\\ I_N\end{pmatrix}. \tag{4}$$

命題 1. (cf. [10]) I_k は Hamilton 系の運動定数である。特に、I_1 は Hamiltonian である ($I_1=H$)。□

命題 1 から Stäckel 系が "Liouville-Arnold の定理を満足する" という意味で可積分であることが示される。

2.2 Stäckel 系と正準変換

正準座標 $\{p_j, q_j\}_{j=1,\cdots,N}$ からなる $2N$ 次元の相空間 $\mathcal{M}$ とする。時刻 t を新たに正準座標 $q_{N+1} = t$ にとると、それに共役な正準運動量は $p_{N+1} = -H$ (H は ハミルトニアン) となる。$\mathcal{M}$ に p_{N+1}, q_{N+1} を加えた $(2N+2)$ 次空間 $\mathcal{M}_\mathcal{E}$ を " 拡張された相空間 " と呼ぶ [8, 14]。

拡張された相空間 $\mathcal{M}_\mathcal{E}$ 上の時間発展を見るために、一般化 Hamilton 関数

$$\mathcal{H}(p_1, \cdots, p_{N+1}, q_1, \cdots, q_{N+1}) = H(p_1, \cdots, p_N, q_1, \cdots, q_N) - E \tag{5}$$

を導入する [8, 14]。正準変数 $p_j, q_j, j = 1, \cdots, N$ の時間発展は

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}(p_1, \cdots, p_{N+1}, q_1, \cdots, q_{N+1})}{\partial q_j}, \quad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}(p_1, \cdots, p_{N+1}, q_1, \cdots, q_{N+1})}{\partial p_j} \tag{6}$$

で表される。これは元の Hamiltonian $H(p_1, \cdots, p_N, q_1, \cdots, q_N)$ を持つ Hamilton 系そのものであり、時間変数 $q_{N+1} = t$ は循環変数、その共役運動量 $p_{N+1} = -E$ は第 1 積分である。E の値によらず、Hamilton 系 (6) の形は変化しない。今後、E の値として $\mathcal{H}(p_1, \cdots, p_{N+1}, q_1, \cdots, q_{N+1}) \equiv 0$ となるようなものを選ぶものとする。

Tsiganov [14] は 拡張された相空間 $\mathcal{M}_\mathcal{E}$ 上で拡張された正準変換

$$\begin{aligned} &\{p_1, \cdots, p_N, p_{N+1}, q_1, \cdots, q_N, q_{N+1}\} \mapsto \{p_1, \cdots, p_N, \tilde{p}_{N+1}, q_1, \cdots, q_N, \tilde{q}_{N+1}\}, \\ &p_{N+1} = -E, \quad \tilde{p}_{N+1} = -\tilde{E}, \quad q_{N+1} = t, \quad \tilde{q}_{N+1} = \tilde{t} \end{aligned} \tag{7}$$

を導入している。ここで、時間変数とその共役運動量の変換は非零関数 $v(q_1, \cdots, q_N)$ に対して

$$\begin{aligned} t &\mapsto \tilde{t}, \quad d\tilde{t} = v(q_1, \cdots q_N)dt, \\ E &\mapsto \tilde{E}, \quad \tilde{E} = v^{-1}(q_1, \cdots q_N)E \end{aligned} \tag{8}$$

という関係をもっている。

相空間 $\mathcal{M}$ 上の Hamilton 系 (6) は拡張された正準変換 (7) によって

$$\begin{aligned} \frac{dp_j}{d\tilde{t}} &= v^{-1}(q_1, \cdots, q_N)\left(\frac{dp_j}{dt} + \tilde{E}\frac{\partial v(q_1, \cdots, q_N)}{\partial q_j}\right), \\ \frac{dq_j}{d\tilde{t}} &= v^{-1}(q_1, \cdots, q_N)\left(\frac{dq_j}{dt} - \tilde{E}\frac{\partial v(q_1, \cdots, q_N)}{\partial p_j}\right), \quad j = 1, \cdots, N, \end{aligned} \tag{9}$$

となり、元の Hamilton 系 (6) の形と大きく異なる。しかし、拡張された相空間 $\mathcal{M}_\mathcal{E}$ 上の Hamilton 系の形は保たれ、以下のような (6) と同じ形

$$\frac{dp_j}{d\tilde{t}} = -\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}(p_1, \cdots, p_N, \tilde{p}_{N+1}, q_1, \cdots, q_N, \tilde{q}_{N+1})}{\partial q_j},$$

$$\frac{dq_j}{d\tilde{t}} = \frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}(p_1,\cdots,p_N,\tilde{p}_{N+1},q_1,\cdots,q_{N+1},\tilde{q}_{N+1})}{\partial p_j}, \quad j=1,2,\cdots,N, \tag{10}$$

ただし、

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}(p_1,\cdots,p_N,\tilde{p}_{N+1},q_1,\cdots,q_N,\tilde{q}_{N+1}) &= v^{-1}(q_1,\cdots,q_N)\mathcal{H}(p_1,\cdots p_{N+1},q_1,\cdots q_{N+1}) \\ &\equiv 0\end{aligned}$$

となる。$\mathcal{M}_\mathcal{E}$ 上の拡張された正準変換 (7) は Hamilton 系を別の Hamilton 系に写すもので、Stäckel 系を別の Stäckel 系に写す変換もそれに含まれている。

命題 1 [14]　第 1 列目だけが異なる 2 つの Stäckel 行列 $\mathbf{S}$、$\tilde{\mathbf{S}}$ を考える。即ち、

$$s_{1,j} \neq \tilde{s}_{1,j}, \quad s_{k,j} = \tilde{s}_{k,j}, \quad k \neq 1,$$

である。各々の Stäckel 行列が満足する (4) が与える Hamilton 関数 $I_1, \tilde{I}_1$ は共通のポテンシャル $U_j(q_j)$ をもち、拡張された相空間 $\mathcal{M}_\mathcal{E}$ 上の正準変換 (7)、(8) を用いて以下のように関係づけられる。

$$\begin{aligned}I_1 = H(p_1,\cdots,p_N,q_1,\cdots,q_N) \mapsto \tilde{I}_1 &= \tilde{H}(p_1,\cdots,p_N,q_1,\cdots,q_N) \\ &= v^{-1}(q_1,\cdots,q_N)I_1, \\ dt \mapsto d\tilde{t} = v(q_1,\cdots,q_N)dt, & \end{aligned} \tag{11}$$

ただし、

$$v(q_1,\cdots,q_N) = \frac{\det\tilde{\mathbf{S}}(q_1,\cdots,q_N)}{\det\mathbf{S}(q_1,\cdots,q_N)} \tag{12}$$

である。■

さらに、正準変換 (7) で一般化 Hamilton 関数 $\mathcal{H}(p_1,\cdots,p_{N+1},q_1,\cdots,q_{N+1}) \equiv 0$ は別の一般化 Hamilton 関数

$$\tilde{\mathcal{H}}(p_1,\cdots,p_N,\tilde{p}_{N+1},q_1,\cdots,q_N,\tilde{q}_{N+1}) \equiv 0$$

に変換される。また (5)、(8)、(11) から

$$\tilde{\mathcal{H}}(p_1,\cdots,p_N,\tilde{p}_{N+1},q_1,\cdots,q_N,\tilde{q}_{N+1}) = \tilde{H}(p_1,\cdots,p_N,q_1,\cdots,q_N) - \tilde{E} \tag{13}$$

とも書ける。次小節で、重要な Stäckel 系として 3 つの可積分系を考える。

2.3 Stäckel 系に属する可積分系

2.3.1 3 次元 Kepler 問題

3 次元 Kepler 問題は一般化 Hamilton 関数

$$\mathcal{H}_{kepl-1}(p_x, p_y, -E_{kepl}, x, y, \tilde{t}) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{K^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - E_{kepl} \tag{14}$$

で定義される力学系である。ここで、E_{kepl} は定数で $\mathcal{H}_{kepl-1}(p_x, p_y, p_z, -E_{kepl}, x, y, z, \tilde{t}) \equiv 0$ で与えられる。K も定数である。$\mathcal{M}$ 内の 正準変換 Kustaanheimo-Stiefel(KS) 変換 (cf. [13], p.24)

$$\begin{aligned} & x = q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2, \quad y = 2(q_1q_2 - q_3q_4), \quad z = 2(q_1q_3 + q_2q_4) \\ & p_x = \frac{1}{2}\frac{p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 + p_4q_4}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}, \quad p_y = \frac{1}{2}\frac{p_1q_2 + p_2q_1 - p_3q_4 - p_4q_3}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}, \\ & p_z = \frac{1}{2}\frac{p_1q_3 + p_2q_4 + p_3q_1 + p_4q_2}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}, \quad 0 = p_1q_4 - p_2q_3 + p_3q_2 - p_4q_1 \end{aligned} \tag{15}$$

で一般化 Hamilton 関数 (14) は一般化 Hamilton 関数

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{kepl-2}(p_1, p_2, p_3, p_4, -E_{kepl}, q_1, q_2, q_3, q_4, \tilde{t}) \\ & = \frac{1}{8}\frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} - \frac{K^2}{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} - E_{kepl} \equiv 0, \end{aligned} \tag{16}$$

となる。この力学系の時間変数 は t でなく $\tilde{t}$ である。一般化 Hamilton 関数 (16) を持つ力学系は Stäckel 系である。この力学系は 4 つの運動定数をもち、それらは

$$\begin{aligned} & ((\tilde{\mathbf{S}}_1)^{-1})^T \begin{pmatrix} p_1^2 + U_1(q_1) \\ p_2^2 + U_2(q_2) \\ p_3^2 + U_3(q_3) \\ p_4^2 + U_4(q_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}, \\ & I_1 = \mathcal{H}_{kepl-2}(p_1, p_2, p_3, p_4, -E_{kepl}, q_1, q_2, q_3, q_4, \tilde{t}) \end{aligned} \tag{17}$$

で与えられる。ただし

$$U_j(q_j) = -8E_{kepl}\, q_j^2 - 2K^2, \quad j = 1, 2, 3, 4 \tag{18}$$

である。(17) 内の Stäckel 行列 $\tilde{\mathbf{S}}_1$ は

$$\tilde{\mathbf{S}}_1 = \begin{pmatrix} 8q_1^2 & 8q_2^2 & 8q_3^2 & 8q_4^2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

一方、4 次元調和振動子は Stäckel 系であり、一般化 Hamilton 関数

$$\mathcal{H}_{osc}(p_1, p_2, p_3, p_4, -E_{osc}, q_1, q_2, q_3, q_4, t) = \frac{1}{4}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) - 2K^2 - E_{osc},$$
$$E_{osc} = 2E_{kepl}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2), \tag{20}$$

をもつ。ここで、時間関数は t、任意の正定数 K^2 は $\mathcal{H}_{osc}(p_1, p_2, p_3, p_4, -E_{osc}, q_1, q_2, q_3, q_4, t) \equiv 0$ を満足するように決められる。4 次元調和振動子は 4 つの保存量

$$(\mathbf{S}_1{}^{-1})^T \begin{pmatrix} p_1^2 + U_1(q_1) \\ p_2^2 + U_2(q_2) \\ p_3^2 + U_3(q_3) \\ p_4^2 + U_4(q_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \mathcal{H}_{osc}(p_1, p_2, p_3, p_4, -E_{osc}, q_1, q_2, q_3, q_4, t) \tag{21}$$

をもつ。ただし、Stäckel 行列 $\mathbf{S}_1$ は

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

である。

一般化 Hamilton 関数 (16)、(20) は共通のポテンシャル $U_1(q_1), U_2(q_2)$ をもち、第 1 列目だけが異なる Stäckel 行列 $\mathbf{S}_1, \tilde{\mathbf{S}}_1$ に対応している。

命題 1 から $\mathcal{H}_{osc}(p_1, p_2, p_3, p_4, -E_{osc}, q_1, q_2, q_3, q_4, t)$ と $\mathcal{H}_{kepl-2}(p_1, p_2, p_3, p_4, -E_{kepl}, q_1, q_2, q_3, q_4, \tilde{t})$ は $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ 上の正準変換で関係づけられる。その関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{osc}(p_1, p_2, p_3, p_4, -E_{osc}, q_1, q_2, q_3, q_4, t) \equiv 0 \mapsto\ & \mathcal{H}_{kepl-2}(p_1, p_2, p_3, p_4, -E_{kepl}, q_1, q_2, q_3, q_4, \tilde{t}) \\ &= v_1^{-1}(q_1, q_2, q_3, q_4)\mathcal{H}_{osc}(p_1, p_2, p_3, p_4, -E_{osc}, q_1, q_2, q_3, q_4, t) \\ &\equiv 0, \end{aligned}$$
$$dt \mapsto d\tilde{t} = v_1(q_1, q_2, q_3, q_4)dt,$$
$$v_1(q_1, q_2, q_3, q_4) = 2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2). \tag{23}$$

時間変換 $t \to \tilde{t}$ は “Kepler 時間変換” と呼ばれる。Kepler 運動は拡張された相空間 $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ 上で変数分離可能系である 4 次元調和振動子に変換された。

Kepler 運動は Hamiltonain (16) 以外に 2 つの保存量をもつ。角運動量

$$\mathbf{h} = (yp_z - zp_y, \quad zp_x - xp_z, \quad xp_y - yp_x) \tag{24}$$

と Runge-Lenz ベクトル

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} (p_y^2 + p_z^2)x - p_x p_y y - p_z p_x z - \frac{K^2 x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ -p_x p_y x + (p_x^2 + p_z^2)y - p_y p_z z - \frac{K^2 y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ -p_z p_x x - p_y p_z y + (p_x^2 + p_y^2)z - \frac{K^2 z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix}^T \tag{25}$$

である。Hamilton 関数 (14)、角運動量 (24) うちの 3 つの独立な運動定数から、Kepler 運動は完全可積分であることがわかる。Runge-Lenz ベクトル (25) はこれらの運動定数であり、この存在により Kepler 運動は" 超可積分系" [7] となる。そのため、任意の有界な解軌道は周期的な閉軌道となる。これらの運動定数を $p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4$ で表すと次のようになる。

a) Hamilton 関数: $\mathcal{H}_{kepl-2}(p_1, p_2, p_3, p_4, -E_{kepl}, q_1, q_2, q_3, q_4, \tilde{t})$,

b) 角運動量:

$$\mathbf{h}_{kepl}(p_1, p_2, q_1, q_2) = \begin{pmatrix} p_4 q_1 - p_1 q_4 \\ \frac{1}{2}\Big((p_1 q_3 - p_3 q_1) - (p_2 q_4 - p_4 q_2)\Big) \\ \frac{1}{2}\Big((p_1 q_2 - p_2 q_1) + (p_3 q_4 - p_4 q_3)\Big) \end{pmatrix}^T, \tag{26}$$

c) Runge-Lenz ベクトル:

$$\mathbf{e}_{kepl}(p_1, p_2, q_1, q_2) = \begin{pmatrix} -p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2 + 8E_{kepl}(q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - q_4^2) \\ \frac{1}{4}\Big(8E_{kepl}(q_1 q_3 + q_2 q_4) - (p_1 p_3 + p_2 p_4)\Big) \\ \frac{1}{4}\Big(8E_{kepl}(q_1 q_2 - q_3 q_4) - (p_1 p_2 - p_3 p_4)\Big) \end{pmatrix}^T. \tag{27}$$

2.3.2. 可積分 Henon-Heiles 系

Henon-Heiles 型力学系は天体力学 [4] でカオティックな Hamilton 系として知られている。Hamiltonian を変換することで、この力学系は完全可積分な Henon-Heiles 型力学系に写る。Henon-Heiles 型力学系の 1 つに一般化 Hamilton 関数

$$\mathcal{H}_{hh-1}(p_x, p_y, -E_{hh}, q_x, q_y, t) = p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x^3 + 2xy^2 - E_{hh} \tag{28}$$

をもつものがある [11]。ここで E_{hh} は $\mathcal{H}_{hh-1}(p_x, p_y, -E_{hh}, q_x, q_y, t) \equiv 0$ を満足するように与えるものとする。x^3 の係数を $-2/3$ とすると (28) は非可積分な Henon-Heiles 系になる。変数分離は $\mathcal{M}$ 上の正準変換

$$q_1 = \frac{1}{2}(x+y), \quad q_2 = \frac{1}{2}(x-y),$$
$$p_1 = p_x + p_y, \quad p_2 = p_x - p_y, \tag{29}$$

でなされる。一般化 Hamilton 関数 $\mathcal{H}_{hh-1}$ は正則なので、時間変数 t は変換されない (時間変換は恒等変換となる)。この変換により一般化 Hamilton 関数 (28) は

$$\mathcal{H}_{hh-2}(p_1, p_2, -E_{hh}, q_1, q_2, t) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + U_1(q_1) + U_2(q_2)\right) \equiv 0 \tag{30}$$

となる。ただし、ポテンシャル関数は

$$U_j(q_j) = \frac{16}{3}q_j^3 + 4q_j^2 - E_{hh}, \quad j = 1, 2 \tag{31}$$

である。(30) は正準変数 p_1, p_2, q_1, q_2 に対して変数分離形になっている。条件 (28) は (30) となる。一般化 Hamilton 関数 (30) をもつ力学系は Stäckel 系で 2 つの運動定数 K_1, K_2 をもつ。K_1, K_2 は

$$({\mathbf{S}_2}^T)^{-1}\begin{pmatrix} p_1^2 + U_1(q_1) \\ p_2^2 + U_2(q_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix},$$
$$K_1 = \mathcal{H}_{hh-2}(p_1, p_2, -E_{hh}, q_1, q_2, t),$$
$$K_2 = \frac{1}{2}\left(p_1^2 - p_2^2 + U_1(q_1) - U(q_2)\right) \tag{32}$$

で与えられる。(32) にある Stäckel 行列は

$$\mathbf{S_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

である。

2.3.3. Holt 系

Holt 系は [6] は可積分な 2 次元 Hamilton 系である。$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ 上の一般化 Hamilton 関数 [11]

$$\mathcal{H}_{hlt-1}(p_x, p_y, -E_{hlt}, x, y, \tilde{t}) = p_x^2 + p_y^2 + 4\alpha^2 x^{4/3} + \frac{9}{4}\alpha^2 x^{-3/2} y^2 + 2\delta x^{-3/2} - 2E_{hlt} \tag{34}$$

をもつ Holt 系を考える。ただし α, δ, E_{hlt} は任意定数である。定数 E_{hlt} は $\mathcal{H}_{hlt-1} \equiv 0$ を満たすように選ぶ。また Holt 系の時間変数が $\tilde{t}$ となっていることに注意する。正準変換

$$
\begin{aligned}
&q_1 = x^{2/3} - \frac{1}{2\sqrt{3}\alpha} p_y, \quad q_2 = x^{2/3} + \frac{1}{2\sqrt{3}\alpha} p_y, \\
&p_1 = -p_x x^{1/3} + \frac{3}{2}\alpha y, \quad p_2 = -p_x x^{1/3} - \frac{3}{2}\alpha y
\end{aligned} \tag{35}
$$

によって、一般化 Hamilton 関数 (34) は Stäckel 系の 拡張された Hamiltonian

$$
\mathcal{H}_{hlt-2}(p_1, p_2, -E_{hlt}, q_1, q_2, \tilde{t}) = (q_1 + q_2)^{-1} \left(p_1^2 + p_2^2 + U_1(q_1) + U_2(q_2) \right) \equiv 0 \tag{36}
$$

となる。ただし

$$
U_j(q_j) = 4\alpha^2 q_j^3 - 2E_{hlt} q_j + 2\delta, \quad j = 1, 2 \tag{37}
$$

である。(36) を一般化 Hamilton 関数にもつ力学系は Stäckel 系で 2 つの第一積分 L_1, L_2 をもつ。L_1, L_2 は

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{\mathbf{S}}_3^{-1})^T \begin{pmatrix} p_1^2 + U_1(q_1) \\ p_2^2 + U_2(q_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}, \\
&L_1 = \mathcal{H}_{hlt-2}(p_1, p_2, -E_{hlt}, q_1, q_2, \tilde{t}), \\
&L_2 = \frac{q_2}{q_1 + q_2} \left(p_1^2 + U_1(q_1) \right) - \frac{q_1}{q_1 + q_2} \left(p_2^2 + U_2(q_2) \right)
\end{aligned} \tag{38}
$$

のように与えられる。Stäckel 行列は

$$
\widetilde{\mathbf{S}_3} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{39}
$$

となる。

(34) を一般化 Hamilton 関数としてもつ Holt 系とは別に一般化 Hamilton 関数

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_s(p_1, p_2, -E_s, q_1, q_2, t) = \frac{1}{2} \left(p_1^2 + p_2^2 + U_1(q_1) + U_2(q_2) \right) \equiv 0, \\
&E_s = \frac{q_1 + q_2}{2} E_{hlt}
\end{aligned} \tag{40}
$$

をもつ Stäckel 系を考える。(37) で定義される $U_1(q_1), U_2(q_2)$ は Holt 系と同じ ポテンシャルである。δ は $\mathcal{H}_s(p_1, p_2, -E_s, q_1, q_2, t) = 0$ を満足するものとする。この系の時間変数 t

で、2 つの保存量 M_1, M_2 をもつ。M_1, M_2 は

$$
\begin{aligned}
&({\mathbf{S}_3}^{-1})^T \begin{pmatrix} p_1^2 + U_1(q_1) \\ p_2^2 + U_2(q_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}, \\
&M_1 = \mathcal{H}_s(p_1, p_2, -E_s, q_1, q_2, t), \\
&M_2 = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + U_1(q_1)\right) - \frac{1}{2}\left(p_2^2 + U_2(q_2)\right)
\end{aligned} \tag{41}
$$

で与えられる。(41) にある Stäckel 行列は

$$
\mathbf{S_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{42}
$$

である。Holt 系と一般化 Hamilton 関数 (40) をもつ Stäckel 系は共通のポテンシャル $U_1(q_1), U_2(q_2)$ をもち、第 1 列目だけが異なる Stäckel 行列に対応している。命題 1 から次の関係が導かれる。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_s(p_1, p_2, -E_s, q_1, q_2, t) \equiv 0 \mapsto\ & \mathcal{H}_{hlt-2}(p_1, p_2, -E_{hlt}, q_1, q_2, \tilde{t}) \\
& = v_3^{-1}(q_1, q_2)\mathcal{H}_s(p_1, p_2, -E_s, q_1, q_2, t) \equiv 0, \\
dt \mapsto d\tilde{t} = v_3(q_1, q_2)dt,& \\
v_3(q_1, q_2) = \frac{q_1 + q_2}{2}.&
\end{aligned} \tag{43}
$$

3 新しい数値積分法

Stäckel 系と関係のある力学系の離散化を行なう新しい数値積分法を説明する。この数値積分法で力学系の全ての保存量が保存される。この数値積分法を用いて、次節で 3 次元 Kepler 問題、可積分 Henon-Heiles 系、Holt 系の離散化を行なう。この数値積分法は正則化 [13],[14]、Stäckel 系の変数分離 [10]、Hamilton 系 のエネルギーを保存する離散化 (cf. [2]) に基づいたものである。

離散化は以下の手順で行なわれる。

i) 正準変換を用いて、元の力学系の一般化 Hamilton 関数を Stäckel 系の一般化 Hamilton 関数に変換する。

ii) Stäckel 系の一般化 Hamilton 関数が拡張された相空間 $\mathcal{M}_\mathcal{E}$ で非正則な場合、$\mathcal{M}_\mathcal{E}$ 上での正準変換を用いて、この系を全 $\mathcal{M}_\mathcal{E}$ で正則な一般化 Hamilton 関数をもつ別の Stäckel 系に変換する。得られた一般化 Hamilton 関数は、互いに共役な正準変数の組だけで表される Hamilton 関数の和の形をとる。この変換は命題 1 で与えられた拡張された正準変換 (7) の 1 種である。

iii) ii) で得られた一般化 Hamilton 関数をもつ Hamilton 系をエネルギーを保存する差分法で離散化する。

iv) iii) で得られた離散力学系を ii) の正準変換の逆変換経由で ii) の非正則な Stäckel 系の離散版に変換する。

v) i) の逆正準変換を用いて、新しい離散時間力学系が iv) で与えられた離散時間力学系から与えられる。

一般に時間変数は ii)、iv) の正準変換とその逆変換の前後で変わる (cf. $t \to \tilde{t}$)。結果として、一般に不等間隔な時間ステップをもつ力学系が導かれることとなる。

4 Stäckel 系から導かれる離散時間可積分系

この節で、2.3 節の 3 つの可積分系の離散化を行なう。ローマ数字 i),$\cdots$, v) は前節で述べた離散化の段階を意味する。

4.1 離散 3 次元 Kepler 問題

4.1.1 3 次元 Kepler 問題の離散化

i) KS 変換 (15) を経由して、一般化 Hamilton 関数 (14) 一般化 Hamilton 関数 (16) となる。一般化 Hamilton 関数 (16) をもつ Hamilton 系は

$$\frac{dq_k}{d\tilde{t}} = \frac{1}{4}\frac{p_k}{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}, \frac{dp_k}{d\tilde{t}} = -\frac{1}{4}\frac{(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2)-8K^2}{q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2}q_k, \quad k=1,2,3,4 \tag{44}$$

である。ただし、$\tilde{t}$ は時刻を示している。(44) は Stäckel 系である。

ii) i) の Stäckel 系の Stäckel 行列は (19) である。これに対応する一般化 Hamilton 関数 (16) は原点 $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (0,0,0,0)$ で非正則である。命題 1 から i) の Stäckel 系は時間変数 $\tilde{t}$ をもつ 4 次元調和振動子となる。4 次元調和振動子の一般化 Hamilton 関数 (20) は拡張された相空間 $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ で正則である。4 次元調和振動子の正準方程式は

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{1}{4}p_k, \qquad \frac{dp_k}{dt} = 2E_{kepl}q_k, \quad k=1,2,3,4 \tag{45}$$

である。4 次元調和振動子に対する Stäckel 行列 (22) をもつ。4 次元調和振動子と Hamilton 系 (44) との関係は (23) で示される。

iii) 4 次元調和振動子 (45) はエネルギーを保存する離散法 (cf. [2], [5]) により次の形に離散化される。

$$\frac{Q_k^{(j+1)}-Q_k^{(j)}}{s^{(j+1)}-s^{(j)}}=\frac{P_k^{(j)}+P_k^{(j+1)}}{8},$$
$$\frac{P_k^{(j+1)}-P_k^{(j)}}{s^{(j+1)}-s^{(j)}}=E_{kepl}(Q_k^{(j)}+Q_k^{(j+1)}),\quad k=1,2,3,4,\quad j=0,1,\cdots,$$
$$s^{(0)}<\cdots<s^{(j-1)}<s^{(j)}<s^{(j+1)}<\cdots, \tag{46}$$

ここで $s^{(j)}$ は不等間隔に増加し、$P_k^{(j)},Q_k^{(j)}$ は時刻 $s^{(j)}$ における P_k,Q_k の値である。これら $s^{(j)},P_k^{(j)},Q_k^{(j)}$ はそれぞれ $t^{(j)},p_k^{(j)},q_k^{(j)}$ の離散版である。離散時間 4 次元調和振動子 (46) の軌道上では、任意の離散時刻 $s^{(j)}$ 一般化 Hamilton 関数 (20) は値 0 を保つ。即ち

$$\mathcal{H}_{osc}(P_1^{(j+1)},P_2^{(j+1)},P_3^{(j+1)},P_4^{(j+1)},-E_{osc}Q_1^{(j+1)},Q_2^{(j+1)},Q_3^{(j+1)},Q_4^{(j+1)},t^{(j+1)})$$
$$=\mathcal{H}_{osc}(P_1^{(j)},P_2^{(j)},P_3^{(j)},P_4^{(j)},-E_{osc}Q_1^{(j)},Q_2^{(j)},Q_3^{(j)},Q_4^{(j)},t^{(j)})$$
$$\equiv 0,\quad j=0,1,\cdots. \tag{47}$$

となる。(47)、(20) から定数 E_{kepl} の値は

$$E_{kepl}=\frac{1}{8}\left(\frac{(P_1^{(0)})^2+(P_2^{(0)})^2+(P_3^{(0)})^2+(P_4^{(0)})^2-8K^2}{(Q_1^{(0)})^2+(Q_2^{(0)})^2+(Q_3^{(0)})^2+(Q_4^{(0)})^2}\right) \tag{48}$$

となる。

iv) 次式 (49) で定義される新しい時間変数 $\tilde{s}^{(j)},j=0,1,\cdots$ を導入する。

$$\tilde{s}^{(j+1)}-\tilde{s}^{(j)}=2\Big((Q_1^{(j)})^2+(Q_2^{(j)})^2+(Q_3^{(j)})^2+(Q_4^{(j)})^2\Big)(s^{(j+1)}-s^{(j)}). \tag{49}$$

ただし、(49) は Kepler の時間変換 (23) の離散版である。(49) から離散 4 次元調和振動子 (46) は正準方程式の離散版

$$\frac{Q_k^{(j+1)}-Q_k^{(j)}}{\tilde{s}^{(j+1)}-\tilde{s}^{(j)}}=\frac{P_k^{(j)}+P_k^{(j+1)}}{16\Big((Q_1^{(j)})^2+(Q_2^{(j)})^2+(Q_3^{(j)})^2+(Q_4^{(j)})^2\Big)},$$
$$\frac{P_k^{(j+1)}-P_k^{(j)}}{\tilde{s}^{(j+1)}-\tilde{s}^{(j)}}=E_{kepl}\frac{Q_k^{(j)}+Q_k^{(j+1)}}{2\Big((Q_1^{(j)})^2+(Q_2^{(j)})^2+(Q_3^{(j)})^2+(Q_4^{(j)})^2\Big)},$$
$$k=1,2,3,4,\quad j=0,1,\cdots \tag{50}$$

に変換される。さらに時間変換 (49) に対して以下の関係が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_{osc}(P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, P_3^{(j)}, P_4^{(j)}, -E_{osc}, Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}, Q_3^{(j)}, Q_4^{(j)}, s^{(j)}) \equiv 0 \\
&\mapsto \mathcal{H}_{kepl-2}(P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, P_3^{(j)}, P_4^{(j)}, -E_{kepl}, Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}, Q_3^{(j)}, Q_4^{(j)}, \tilde{s}^{(j)}) \\
&\quad = v_1^{-1}(Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}, Q_3^{(j)}, Q_4^{(j)})\mathcal{H}_{osc}(P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, P_3^{(j)}, P_4^{(j)}, -E_{osc}, Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}, Q_3^{(j)}, Q_4^{(j)}, \tilde{s}^{(j)}) \\
&\quad \equiv 0, \\
&s^{(j+1)} - s^{(j)} \mapsto \tilde{s}^{(j+1)} - \tilde{s}^{(j)} = v_1(Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}, Q_3^{(j)}, Q_4^{(j)})(s^{(j+1)} - s^{(j)}), \\
&v_1(Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}, Q_3^{(j)}, Q_4^{(j)}) = 2\Big((Q_1^{(j)})^2 + (Q_2^{(j)})^2 + (Q_3^{(j)})^2 + (Q_4^{(j)})^2\Big), \\
&\quad j = 0, 1, \cdots.
\end{aligned} \tag{51}
$$

(50) は一般化 Hamilton 関数 $\mathcal{H}_{kepl-2}$ の値を 0 に保つ。(50) は 3 次元 Kepler 問題の離散版であるので、離散 *3* 次元 *Kepler* 問題 と呼ぶことにする。

注意 1.
エネルギー値 (48) をもつ離散 Kepler 問題 (50) は陽的な不等間隔離散幅をもつ 4 次元調和振動子の離散版とみなせる。KS 変換 (15) の逆変換を用いて、離散 Kepler 問題 (50) は p_x, p_y, p_z, x, y, z の離散版変数 P_X, P_Y, P_Z, X, Y, Z で書き換えられる。しかし、得られた離散方程式は非常に複雑なものとなり、$P_X^{(j)}, P_Y^{(j)}, P_Z^{(j)}, X^{(j)}, Y^{(j)}, Z^{(j)}$ から陽的に $P_X^{(j+1)}, P_Y^{(j+1)}, P_Z^{(j+1)}, X^{(j+1)}, Y^{(j+1)}, Z^{(j+1)}$ を計算できるものに変形できない。

4.1.2 離散 Kepler 問題の性質

iv) で述べたように、時間変換 (50) で $\mathcal{H}_{kepl-2}$ は 0 を保つ。(50) は他にも保存量をもつ。

Theorem 2. 離散 Kepler 問題 (50) は次の 3 つの運動定数をもつ。

a) Hamilton 関数の離散近似

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_{d-kepl}(P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, P_3^{(j)}, P_4^{(j)}, Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}, Q_3^{(j)}, Q_4^{(j)}) \\
&:= \mathcal{H}_{kepl-2}(P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, P_3^{(j)}, P_4^{(j)}, -E_{kepl}, Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}, Q_3^{(j)}, Q_4^{(j)}, \tilde{s}^{(j)}),
\end{aligned} \tag{52}
$$

b) 角運動量の離散近似

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{h}_{d-kepl}(P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, P_3^{(j)}, P_4^{(j)}, Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}, Q_3^{(j)}, Q_4^{(j)}) \\
&:= \begin{pmatrix} P_4^{(j)}Q_1^{(j)} - P_1^{(j)}Q_4^{(j)} \\ \frac{1}{2}\Big((P_1^{(j)}Q_3^{(j)} - P_3^{(j)}Q_1^{(j)}) - (P_2^{(j)}Q_4^{(j)} - P_4^{(j)}Q_2^{(j)})\Big) \\ \frac{1}{2}\Big((P_1^{(j)}Q_2^{(j)} - P_2^{(j)}Q_1^{(j)}) + (P_3^{(j)}Q_4^{(j)} - P_4^{(j)}Q_3^{(j)})\Big) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{53}
$$

c) Runge-Lenz ベクトルの離散近似

$$\mathbf{e}_{d-kepl}(P_1^{(j)},P_2^{(j)},P_3^{(j)},P_4^{(j)},Q_1^{(j)},Q_2^{(j)},Q_3^{(j)},Q_4^{(j)})$$
$$:=\begin{pmatrix} -(P_1^{(j)})^2+(P_2^{(j)})^2+(P_3^{(j)})^2-(P_4^{(j)})^2+8E_{kepl}\left((Q_1^{(j)})^2-(Q_2^{(j)})^2-(Q_3^{(j)})^2-(Q_4^{(j)})^2\right) \\ \frac{1}{4}\left(8E_{kepl}(Q_1^{(j)}Q_3^{(j)}+Q_2^{(j)}Q_4^{(j)})-(P_1^{(j)}P_3^{(j)}+P_2^{(j)}P_4^{(j)})\right) \\ \frac{1}{4}\left(8E_{kepl}(Q_1^{(j)}Q_2^{(j)}-Q_3^{(j)}Q_4^{(j)})-(P_1^{(j)}P_2^{(j)}-P_3^{(j)}P_4^{(j)})\right) \end{pmatrix}^T \quad (54)$$

注意 2. 元の連続時間変数をもつ Kepler 問題の保存量の形とは全く同じものである。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_{d-kepl}(P_1^{(j)},P_2^{(j)},P_3^{(j)},P_4^{(j)},Q_1^{(j)},Q_2^{(j)},Q_3^{(j)},Q_4^{(j)})\\
&=\mathcal{H}_{kepl-2}(P_1^{(j)},P_2^{(j)},P_3^{(j)},P_4^{(j)},-E_{kepl},Q_1^{(j)},Q_2^{(j)},Q_3^{(j)},Q_4^{(j)},\tilde{s}^{(j)}),\\
&\mathbf{h}_{d-kepl}(P_1^{(j)},P_2^{(j)},P_3^{(j)},P_4^{(j)},Q_1^{(j)},Q_2^{(j)},Q_3^{(j)},Q_4^{(j)})\\
&=\mathbf{h}_{kepl}(P_1^{(j)},P_2^{(j)},P_3^{(j)},P_4^{(j)},Q_1^{(j)},Q_2^{(j)},Q_3^{(j)},Q_4^{(j)}),\\
&\mathbf{e}_{d-kepl}(P_1^{(j)},P_2^{(j)},P_3^{(j)},P_4^{(j)},Q_1^{(j)},Q_2^{(j)},Q_3^{(j)},Q_4^{(j)})\\
&=\mathbf{e}_{kepl}(P_1^{(j)},P_2^{(j)},P_3^{(j)},P_4^{(j)},Q_1^{(j)},Q_2^{(j)},Q_3^{(j)},Q_4^{(j)}).
\end{aligned} \quad (55)$$

ここで離散 Kepler 問題 (50) は連続時間 3 次元 Kepler 問題の全ての運動定数 (特に Runge-Lenz ベクトル) を保存する。この性質は Kepler 問題の数値積分スキーム、例えば シンプレクティック数値積分法 [16, 17]、エネルギーを保存するスキーム [2] のものとは異なるものである。

4.2. 離散可積分 Henon-Heiles 系

4.2.1. 可積分 Henon-Heiles 系の離散化

i) 正準変換 (29) で一般化 Hamilton 関数 (28) は一般化 Hamilton 関数 (30) に変形される。Hamilton 関数 (30) をもつ Hamilton 系は

$$\frac{dq_k}{dt}=p_k,\quad \frac{dp_k}{dt}=-8q_k^2-4q_k,\quad k=1,2. \quad (56)$$

ただし t は時間変数である。(56) は Stäckel 系である。

ii) i) で得られた Stäckel 行列 (33) に対応する Stäckel 系である。一般化 Hamilton 関数 (30) は相空間全体で正則かつ変数分離可能になっている。

iii) Hamilton 系 (56) はエネルギーを保存する離散法によって

$$\frac{Q_k^{(j+1)} - Q_k^{(j)}}{s^{(j+1)} - s^{(j)}} = \frac{P_k^{(j)} + P_k^{(j+1)}}{2},$$

$$\frac{P_k^{(j+1)} - P_k^{(j)}}{s^{(j+1)} - s^{(j)}} = -\frac{8\left((Q_k^{(j+1)})^3 - (Q_k^{(j)})^3\right) + 6\left((Q_k^{(j+1)})^2 - (Q_k^{(j)})^2\right)}{3\left(Q_k^{(j+1)} - Q_k^{(j)}\right)}$$

$$s^{(0)} < \cdots < s^{(j-1)} < s^{(j)} < s^{(j+1)} < \cdots, \tag{57}$$

と離散化される。ここで、$s^{(j)}$ は離散時間変数で $P_k^{(j)}, Q_k^{(j)}$ は時刻 $s^{(j)}$ における P_k, Q_k の値である。$P_k^{(0)} = p_k(0), Q_k^{(0)} = q_k(0)$ であり、P_k, Q_k は正準変数 p_k, q_k の離散版である。離散時間可積分 Henon-Heiles 系 (57) の軌道上では任意の離散時刻 $s^{(j)}$ で一般化 Hamilton 関数 (30) の値は 0 となる。即ち

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}_{hh-2}(P_1^{(j+1)}, P_2^{(j+1)}, -E_{hh}, Q_1^{(j+1)}, Q_2^{(j+1)}, s^{(j+1)})\\ &= \mathcal{H}_{hh-2}(P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, -E_{hh}, Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}, s^{(j)}) \equiv 0, \quad j = 0, 1, \cdots\end{aligned} \tag{58}$$

が成り立つ。(58) から運動定数 $E_{1,hh}, E_{2,hh}$ の値は

$$E_{k,hh} = \frac{1}{2}(P_k^{(0)})^2 + \frac{8}{3}(Q_k^{(0)})^3 + 2(Q_k^{(0)})^2, \quad k = 1, 2, \tag{59}$$

となる。ここで、$E_{hh} = E_{1,hh} + E_{2,hh}$ である。

iv) iv) はこの離散化では省略される。

v) 正準変換 (29) の逆変換で離散時間系 (57) は

$$\begin{aligned}
\frac{X^{(j+1)} - X^{(j)}}{s^{(j+1)} - s^{(j)}} &= P_X^{(j+1)} + P_X^{(j)}, \quad \frac{Y^{(j+1)} - Y^{(j)}}{s^{(j+1)} - s^{(j)}} = P_Y^{(j+1)} + P_Y^{(j)},\\
\frac{P_X^{(j+1)} - P_X^{(j)}}{s^{(j+1)} - s^{(j)}} &= -\frac{2}{3}\Big(\big((X^{(j+1)})^2 + X^{(j+1)}X^{(j)} + (X^{(j)})^2\big)\\
&\quad + \big((Y^{(j+1)})^2 + Y^{(j+1)}Y^{(j)} + (Y^{(j)})^2\big)\Big) - (X^{(j+1)} + X^{(j)}),\\
\frac{P_Y^{(j+1)} - P_Y^{(j)}}{s^{(j+1)} - s^{(j)}} &= -\frac{2}{3}\big(2X^{(j+1)}Y^{(j+1)} + 2X^{(j)}Y^{(j)}\\
&\quad + X^{(j+1)}Y^{(j)} + X^{(j)}Y^{(j+1)}\big) - (Y^{(j+1)} + Y^{(j)}),\\
s^{(0)} < \cdots < &\ s^{(j-1)} < s^{(j)} < s^{(j+1)} < \cdots.
\end{aligned} \tag{60}$$

に変換される。(60) は $\mathcal{H}_{hh-2}$ の値を 0 に保つ。(60) を 離散可積分 *Henon-Hieles* 系と呼ぶことにする。

2. 離散可積分 Henon-Heiles 系の運動定数
離散可積分 Henon-Heiles 系 (60) は次の 2 つの定数を持つ。

a) Hamilton 関数の離散近似

$$\mathcal{H}_{d-hh-1}(P_X^{(j)}, P_Y^{(j)}, X^{(j)}, Y^{(j)}) := \mathcal{H}_{hh-1}(P_X^{(j)}, P_Y^{(j)}, -E_{hh}, X^{(j)}, Y^{(j)}, s^{(j)}), \qquad (61)$$

b) (32) の運動定数 K_2 の離散近似

$$\begin{aligned} K_{2,d-hh-1}(P_X^{(j)}, P_Y^{(j)}, X^{(j)}, Y^{(j)}) \;:=\; & 2P_X^{(j)}P_Y^{(j)} + 4(X^{(j)})^2Y^{(j)} + \frac{4}{3}(Y^{(j)})^3 \\ & +4X^{(j)}Y^{(j)} - E_{1,hh} + E_{2,hh}. \end{aligned} \qquad (62)$$

この場合 (57) は (32) の K_1, K_2 を一定値に保つ。(29) の逆正準変換で K_1, K_2 はそれぞれ (61)、(62) の右辺になる。

$$\begin{aligned} K_1 &= \mathcal{H}_{hh-2}(P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, -E_{hh}, Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}, s^{(j)}) \\ &= \mathcal{H}_{hh-1}(P_X^{(j)}, P_Y^{(j)}, -E_{hh}, X^{(j)}, Y^{(j)}, s^{(j)}), \\ K_2 &= \frac{1}{2}\left((P_1^{(j)})^2 - (P_2^{(j)})^2\right) + \frac{8}{3}\left((Q_1^{(j)})^3 - (Q_2^{(j)})^3\right) + 2\left((Q_1^{(j)})^2 - (Q_2^{(j)})^2\right) \\ &= K_{2,d-hh-1}(P_X^{(j)}, P_Y^{(j)}, X^{(j)}, Y^{(j)}), \end{aligned}$$

から、(61)、(62) は離散可積分 Henon-Heiles 系 (60) の運動定数となることが示された。

4.3. 離散 Holt 系

4.3.1. 離散 Holt 系の離散化

i) 正準変数 (35) 経由で、一般化 Hamilton 関数 (34) は一般化 Hamilton 関数 (36) に写る。一般化 Hamilton 関数 (36) に対する正準方程式は

$$\frac{dq_k}{d\tilde{t}} = \frac{2p_k}{q_1 + q_2}, \quad \frac{dp_k}{d\tilde{t}} = \frac{2E_{hlt} - 12\alpha^2 q_k^2}{q_1 + q_2}, \quad k = 1, 2 \qquad (63)$$

である。ただし $\tilde{t}$ は時間変数である。これは Stäckel 系である。

ii) i) の Stäckel 系は Stäckel 行列 (39) に対応している。この系の Hamilton 関数は相空間内の直線 $q_1+q_2=0$ 上では非正則である。命題 1 からこの Stäckel 系 (63) は Hamilton 関数 $\mathcal{H}_s(p_1,p_2,-E_s,q_1,q_2,t)$ (40) に対応する。ここで時間変数は t である。Hamilton 関数 $\mathcal{H}_s$ は相空間全体で正則である。導かれた Hamilton 系は非調和振動子

$$\begin{aligned}\frac{dq_k}{dt} &= p_k,\\ \frac{dp_k}{dt} &= E_{hlt}-6\alpha^2q_k^2, \quad k=1,2\end{aligned} \tag{64}$$

である。この系の Stäckel 行列は (42) である。Holt 系と Hamilton 系 (64) との関係は (43) で表される。

iii) Holt 系の正準方程式 (63) はエネルギーを保存する離散法 (cf. [2],[5]) で次のように離散化される。

$$\begin{aligned}&\frac{Q_k^{(j+1)}-Q_k^{(j)}}{s^{(j+1)}-s^{(j)}}=\frac{P_k^{(j)}+P_k^{(j+1)}}{2},\\ &\frac{P_k^{(j+1)}-P_k^{(j)}}{s^{(j+1)}-s^{(j)}}=E_{hlt}-2\alpha^2\left((Q_k^{(j+1)})^2+(Q_k^{(j+1)})(Q_k^{(j)})+(Q_k^{(j)})^2\right),\\ &s^{(0)}<\cdots<s^{(j-1)}<s^{(j)}<s^{(j+1)}<\cdots.\end{aligned} \tag{65}$$

ここで $s^{(j)}$ は離散時間変数であり、$P_k^{(j)},Q_k^{(j)}$ は離散時刻 $s^{(j)}$ で $P_k^{(0)}=p_k(0)$, $Q_k^{(0)}=q_k(0)$ を満たす。離散時間力学系 (65) の軌道上で一般化 Hamilton 関数 (40) は任意の離散時刻 $s^{(j)}$ に対して一定値をとる。即ち

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}_s(P_1^{(j+1)},P_2^{(j+1)},-E_s,Q_1^{(j+1)},Q_2^{(j+1)},s^{(j+1)})\\ =\ &\mathcal{H}_s(P_1^{(j)},P_2^{(j)},-E_s,Q_1^{(j)},Q_2^{(j)},s^{(j)}),j=0,1,\cdots\end{aligned} \tag{66}$$

である。条件 (40) から $\mathcal{H}_s(P_1^{(j)},P_2^{(j)},-E_s,Q_1^{(j)},Q_2^{(j)},s^{(j)})=0$ となる。(66) から定数値 E_{hlt} は

$$E_{hlt}=\frac{(P_1^{(0)})^2+(P_2(0))^2+4\alpha^2((Q_1^{(0)})^3+(Q_2^{(0)})^3)}{2(Q_1^{(0)}+Q_2^{(0)})} \tag{67}$$

となる。

iv)

$$\tilde{s}^{(j+1)}-\tilde{s}^{(j)}=\frac{Q_1^{(j)}+Q_2^{(j)}}{2}(s^{(j+1)}-s^{(j)}) \tag{68}$$

で定義される新しい離散時間変数 $\tilde{s}^{(j)}, j = 0, 1, \cdots$ を導入する。ここで (68) は (43) の離散近似である。(43) から、離散時間非調和振動子 (65) は

$$\frac{Q_k^{(j+1)} - Q_k^{(j)}}{\tilde{s}^{(j+1)} - \tilde{s}^{(j)}} = \frac{P_k^{(j+1)} + P_k^{(j)}}{Q_1^{(j)} + Q_2^{(j)}},$$
$$\frac{P_k^{(j+1)} - P_k^{(j)}}{\tilde{s}^{(j+1)} - \tilde{s}^{(j)}} = \frac{2E_{hlt} - 4\alpha^2\left((Q_k^{(j+1)})^2 + Q_k^{(j+1)}Q_k^{(j)} + (Q_k^{(j)})^2\right)}{Q_1^{(j)} + Q_2^{(j)}}, k = 1, 2 \qquad (69)$$

と変形される。さらに (68) から 2 つの力学系間の関係

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_s(P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, -E_s, Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}, s^{(j)}) \equiv 0 \\
&\mapsto \mathcal{H}_{hlt-2}(P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, -E_{hlt}, Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}, \tilde{s}^{(j)}) \\
&\qquad = v_3^{-1}(Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)})\mathcal{H}_s(P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, -E_s, Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}, s^{(j)}) \equiv 0, \\
&s^{(j+1)} - s^{(j)} \mapsto \tilde{s}^{(j+1)} - \tilde{s}^{(j)} = v_3(Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)})(s^{(j+1)} - s^{(j)}), \\
&v_3(Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}) = \frac{Q_1^{(j)} + Q_2^{(j)}}{2}, \quad j = 1, 2, \cdots.
\end{aligned} \qquad (70)$$

が得られる。(69) は $\mathcal{H}_{hlt-2}$ の値を 0 に保つ。(69) を **離散** *Holt* 系 と呼ぶことにする。

v) 正準変数 (35) の逆変換を用いて、離散 Holt 系の $P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, Q_1^{(j)}, Q_2^{(j)}$ から $X^{(j)}, Y^{(j)}, P_X^{(j)}$, $P_Y^{(j)}$ が得られる。

4.3.2. 離散 Holt 系の運動定数

離散 Holt 系 (69) は以下の 2 つの運動定数をもつ。

a) Hamilton 関数の離散近似

$$\mathcal{H}_{d-hlt}(P_X^{(j)}, P_Y^{(j)}, Q_X^{(j)}, Q_Y^{(j)}) := \mathcal{H}_{hlt-1}(P_X^{(j)}, P_Y^{(j)}, -E_{hlt}, X^{(j)}, Y^{(j)}, \tilde{s}^{(j)}). \qquad (71)$$

b) (38) にある L_2 の離散近似

$$
\begin{aligned}
&L_{2,d-hlt-1}(P_X^{(j)},P_Y^{(j)},X^{(j)},Y^{(j)}) \\
:= \ & \frac{(P_X^{(j)})^2 P_Y^{(j)}}{2\sqrt{3}\alpha}+\frac{(P_Y^{(j)})^3}{3\sqrt{3}\alpha}-\frac{4\alpha P_Y^{(j)}X^{4/3}}{\sqrt{3}}-3\alpha P_X^{(j)}(X^{(j)})^{1/3}Y^{(j)} \\
&+\frac{3\sqrt{3}\alpha(X^{(j)})^{-2/3}(Y^{(j)})^2P_Y^{(j)}}{8}+\frac{\delta(X^{(j)})^{-3/2}P_Y^{(j)}}{\sqrt{3}\alpha}
\end{aligned}
\tag{72}
$$

(65) が L_1 and L_2 を定数に保つことを示すのは容易である。正準変換 (35) の逆変換で L_1、L_2 はそれぞれ (71)、(72) となる。

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \mathcal{H}_{hlt-2}(P_1^{(j)},P_2^{(j)},-E_{hlt},Q_1^{(j)},Q_2^{(j)},\tilde{s}^{(j)}) \\
&= \mathcal{H}_{hlt-1}(P_X^{(j)},P_Y^{(j)},-E_{hlt},X^{(j)},Y^{(j)},\tilde{s}^{(j)}), \\
L_2 &= L_{2,d-hh-1}(P_X^{(j)},P_Y^{(j)},X^{(j)},Y^{(j)}),
\end{aligned}
$$

が成り立つので、(71)、(72) は離散 Holt 系の運動定数となることがわかる。

5 まとめ

Stäckel 系に対する新しい数値積分法を提案した。元の Stäckel 系の Hamilton 関数が非正則である場合、適当に拡張された正準変換によって、正則かつ変数分離形な Stäckel 系の Hamilton 関数に変換される。変数分離で出てくる正準変数をもつ Stäckel 系 の離散法として Greenspan のエネルギーを保存する離散法を用いた。Greenspan 流の離散法と拡張された正準変換から得られた Stäckel 系の離散方程式は元の力学系のもつ全ての保存量を保つ。

References

[1] T. Matsuo and D. Furihata, Dissipative or conservative finite-difference schemes for complex-valued nonlinear partial differential equation, J. Comput. Phys. **171** (2001) 425-447.

[2] D. Greenspan, *Discrete Numerical Method in Physics and Engineering* (Academic Press, New York, 1974).

[3] E. Hairer, Backward analysis of numerical integration and symplectic methods, Ann. Numer. Math. **1** (1994) 107-132.

[4] M. Henon and C. Heiles, The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments, Astron J. **69** (1964) 73-79.

[5] R. Hirota, *Lectures on Difference Equations*, in Japanese, (Saiensusha, Tokyo, 2000).

[6] C. R. Holt, Construction of new integrable Hamiltonians in two degrees of freedom, J. Math. Phys. **23** (1982) 1037-1046.

[7] T. Iwai, N. Katayama, Multifold Kepler system - Dynamical systems all of whose bounded trajectories are closed, J. Math. Phys. **36** (1995) 1790-1811.

[8] G. Lanczos, *The variational principles of mechanics*, Tronto Univ. Press, Tronto, 1949.

[9] Y. Minesaki, Y. Nakamura, Phys. Lett. A.

[10] A. M. Perelomov, *Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras, Vol. I* (Birkhäuser Verlag, Basel, 1990).

[11] A. Ramani, B. Grammaticos and T. Bountis, The Painlevé property and singularity analysis of integrable and nonintegrable systems, Phys. Rep. **180** (1989) 159-245.

[12] J. M. Sanz-Serna and M. P. Calvo, *Numerical Hamiltonian Problems* (Chapman and Hall, London, 1994).

[13] E. L. Stiefel and G. Scheifele, *Linear and Regular Celestial Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, 1971).

[14] A. V. Tsiganov, The Maupertius principle and integrable systems, preprint *arXiv: nlin.SI/0009044*, 2000.

[15] J. M. Wendlandt and J. E. Marsden, Mechanical integrators derived from a discrete variational principal, Physica D **106** (1997) 223-246.

[16] H. Yoshida, Non-existence of the modified first integral by symplectic integration methods II: Kepler problem, Celest. Mech. Dyn. Astron. to appear.

[17] H. Yoshida, Non-existance of the modified first integral by symplectic integration methods, Phys. Lett. A **282** (2002) 276-283.